



ce
pre
UNI

**CICLO
PRE 2024 - I**

Trigonometría

✓ **ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS**



ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Definición

Una ecuación trigonométrica es aquel tipo de ecuación donde la incógnita está afectada de un operador trigonométrico y se verifica para un conjunto determinado de valores que puede tomar dicha incógnita.

Ejemplos

- $\text{sen}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\tan(2x) = 2023$
- $\cos(3x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$
- $\text{csc}^2(x) + 4\text{csc}^2(2x) + 16\text{csc}^2(4x) = 128 - \text{sec}^2(x)$
- $\arcsen(x) = 3\arccos(x)$
- $\arctan(x) = \text{arcsec}(2x)$

Solución de una ecuación

La solución de una ecuación trigonométrica es un valor numérico $a \in \mathbb{R}$ que satisface dicha ecuación.

Ejemplo:

Dada la ecuación: $\sin^4(x) + \cos^4(x) = \frac{1}{2}$

Notamos que: $x = \frac{\pi}{4}$ es una solución

dado que: $\sin^4\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos^4\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (satisface)

Por el contrario: $x = \frac{\pi}{3}$ no es solución

porque: $\sin^4\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos^4\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{8} = \frac{1}{2}$ (no satisface)

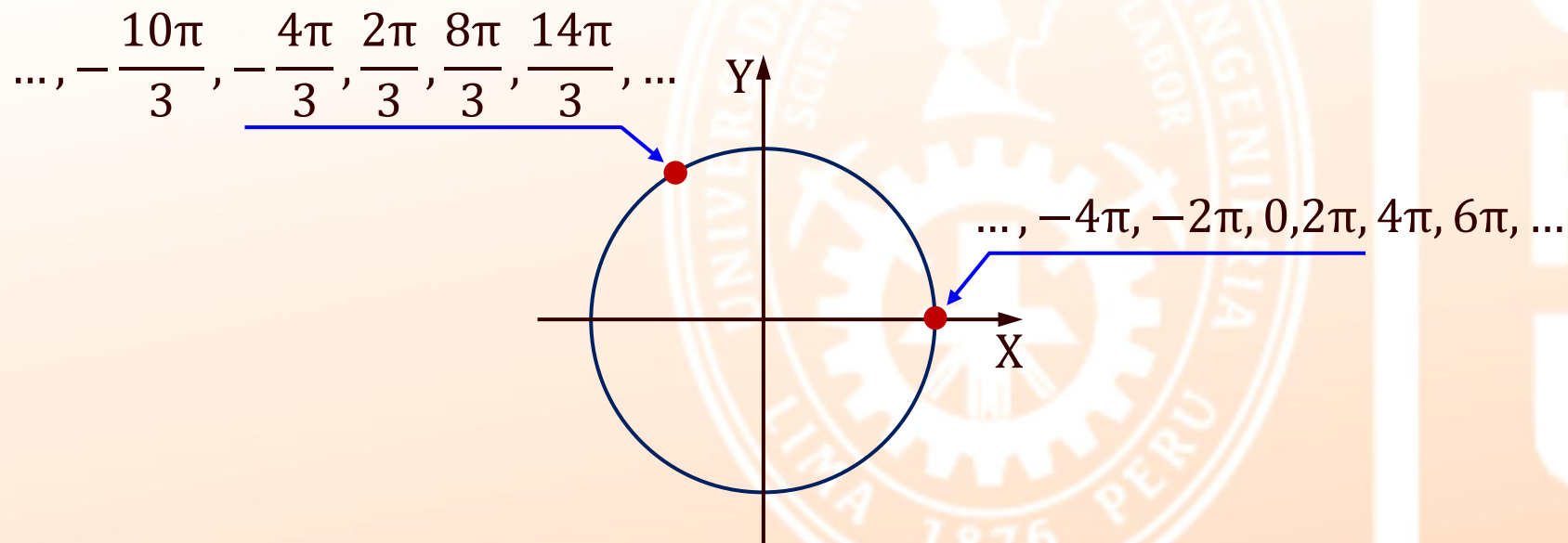
Conjunto Solución

Es el conjunto que reúne a todas las soluciones de una ecuación.

Ejemplo:

La ecuación $\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) = 1$ tiene por conjunto de solución a:

$$C.S. = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = 2k\pi \vee x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \right\}; k \in \mathbb{Z}$$



Ecuación trigonométrica elemental (E.T.E)

Es aquella ecuación trigonométrica que tiene la siguiente forma:

$$F.T(ax + b) = N$$

donde a y b son constantes reales ($a \neq 0$), x es la incógnita y N es un número real; cuya pertenencia al rango de la función trigonométrica que interviene, garantiza soluciones de la ecuación.

Ejemplos:

- $\text{sen}(x) = \frac{1}{2}$
- $\tan(2x) = \sqrt{3}/3$
- $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$
- $\cot\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -1$
- $\sec\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 2$
- $\csc\left(\frac{\pi}{6} - 5x\right) = 3$

Valor principal de una Ecuación trigonométrica elemental

El valor principal V_p de una ecuación trigonométrica elemental se define de la siguiente manera:

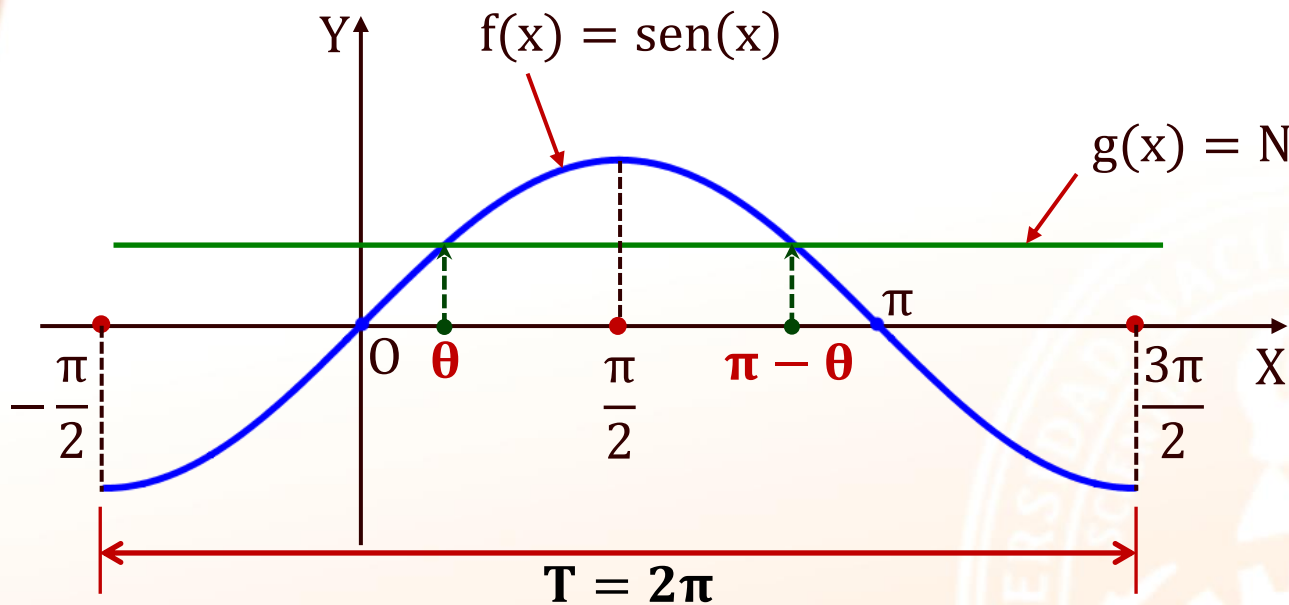
ET Elemental (E.T.E)	Valor Principal (V_p)
$\text{sen}(ax + b) = N$	$V_p = \arcsen(N)$
$\text{cos}(ax + b) = N$	$V_p = \arccos(N)$
$\text{tan}(ax + b) = N$	$V_p = \arctan(N)$

Ejemplos:

$$\begin{aligned}
 * \text{sen}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} &\Rightarrow V_p = \arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} & * \text{sen}(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} &\Rightarrow V_p = \arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \\
 * \text{cos}(3x) = -\frac{1}{2} &\Rightarrow V_p = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} & * \text{tan}(5x) = -1 &\Rightarrow V_p = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

Determinación del conjunto solución

Para la ecuación: $\boxed{\text{sen}(x) = N}$; $-1 \leq N \leq 1$



Notamos que:

$$x = \theta \quad \vee \quad x = \pi - \theta$$

Considerando el periodo ($T = 2\pi$) de la función seno y $k \in \mathbb{Z}$:

$$x = \theta + 2k\pi \quad \vee \quad x = \pi - \theta + 2k\pi$$

$$x = 2k\pi + \theta \quad \vee \quad x = (2k + 1)\pi - \theta$$

$$\Rightarrow x = k\pi + (-1)^k \theta$$

Dado que $\text{sen}(\theta) = N \wedge \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

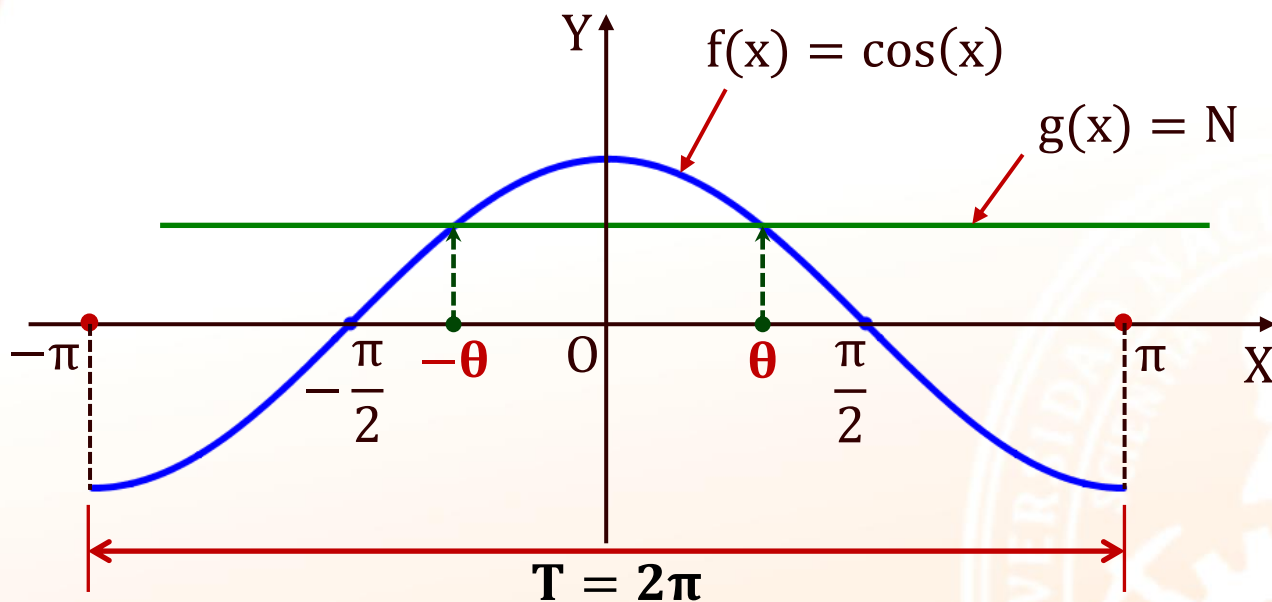
$$\rightarrow \theta = \text{arcsen}(N)$$

$$\Rightarrow x = k\pi + (-1)^k \text{arcsen}(N)$$

$$\boxed{\text{C. S.} = \{x / x = k\pi + (-1)^k \text{arcsen}(N)\}, k \in \mathbb{Z}}$$

Determinación del conjunto solución

Para la ecuación: $\cos(x) = N$; $-1 \leq N \leq 1$



Notamos que:

$$x = \theta \quad \vee \quad x = -\theta$$

Considerando el periodo ($T = 2\pi$) de la función coseno y $k \in \mathbb{Z}$:

$$x = \theta + 2k\pi \quad \vee \quad x = -\theta + 2k\pi$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi \pm \theta$$

Dado que $\cos(\theta) = N \wedge \theta \in [0; \pi]$

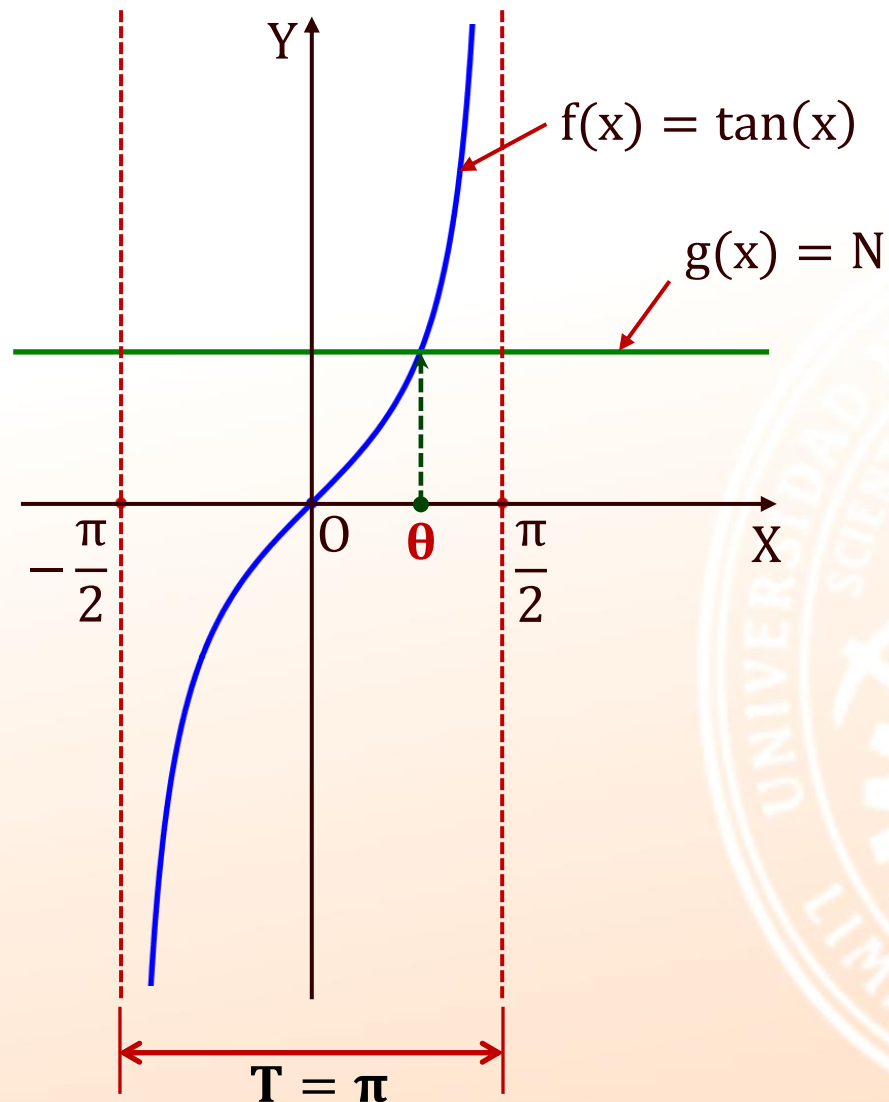
$$\rightarrow \theta = \arccos(N)$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi \pm \arccos(N)$$

$$\text{C. S.} = \{x / x = 2k\pi \pm \arccos(N)\}, k \in \mathbb{Z}$$

Determinación del conjunto solución

Para la ecuación: $\tan(x) = N$; $N \in \mathbb{R}$



Notamos que:

$$x = \theta$$

Considerando el periodo ($T = \pi$) de la función tangente y $k \in \mathbb{Z}$:

$$x = k\pi + \theta$$

Dado que $\tan(\theta) = N \wedge \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$$\rightarrow \theta = \arctan(N)$$

$$\Rightarrow x = k\pi + \arctan(N)$$

$$C. S. = \{x / x = k\pi + \arctan(N)\}, k \in \mathbb{Z}$$

Conjunto solución de una E.T. elemental

Dada una E.T. elemental, su conjunto solución se obtiene de la siguiente manera:

E.T. Elemental	Conjunto solución	Condición
$\text{sen}(ax + b) = N; -1 \leq N \leq 1$	$\{x/ax + b = k\pi + (-1)^k V_p\}$	$k \in \mathbb{Z}$
$\cos(ax + b) = N; -1 \leq N \leq 1$	$\{x/ax + b = 2k\pi \pm V_p\}$	$k \in \mathbb{Z}$
$\tan(ax + b) = N; N \in \mathbb{R}$	$\{x/ax + b = k\pi + V_p\}$	$k \in \mathbb{Z}$

Observaciones:

- * Para determinar el conjunto solución, despejamos la incógnita x a partir de la igualdad anterior.
- * De presentarse una E.T.E con las FT cotangente, secante o cosecante, se adaptará a una de las tres formas presentadas.
- * Para generar algunas soluciones particulares, se le asigna valores al parámetro $k \in \mathbb{Z}$.

PROBLEMA 01

Calcule la suma de soluciones en $\langle -\pi/2; \pi \rangle$, de la siguiente ecuación:

$$\text{sen}(3x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- A) $\pi/2$ B) $2\pi/3$
C) $4\pi/3$
D) $5\pi/3$ E) 2π

CLAVE: B

PROBLEMA 02

Calcule la suma de soluciones en $\langle 0; 3\pi/2 \rangle$, de la siguiente ecuación:

$$\cos(3x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

- A) π B) $4\pi/3$
C) $5\pi/3$
D) 2π E) $8\pi/3$

CLAVE: E

Ecuaciones trigonométricas elementales especiales

Denominamos de esta manera a aquellas E.T.E cuyos argumentos coinciden con los arcos cuadrantales. Destaquemos las siguientes:

$$\text{sen}(ax + b) = 1 \Rightarrow ax + b = (4k + 1) \frac{\pi}{2}$$

$$\text{sen}(ax + b) = 0 \Rightarrow ax + b = k\pi$$

$$\text{sen}(ax + b) = -1 \Rightarrow ax + b = (4k + 3) \frac{\pi}{2} \text{ o } ax + b = (4k - 1) \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(ax + b) = 1 \Rightarrow ax + b = 2k\pi$$

$$\cos(ax + b) = -1 \Rightarrow ax + b = (2k + 1)\pi$$

$$\cos(ax + b) = 0 \Rightarrow ax + b = (2k + 1) \frac{\pi}{2} \text{ o } ax + b = (2k - 1) \frac{\pi}{2} \quad (\forall k \in \mathbb{Z})$$

PROBLEMA 03

Calcule la suma de la mayor y menor solución en $\langle -\pi; 2\pi \rangle$, de la siguiente ecuación:

$$\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$$

A) $\pi/2$

B) $3\pi/4$

C) $7\pi/4$

D) 2π

E) $9\pi/4$

CLAVE: C

PROBLEMA 04

Calcule la suma de la mayor y menor solución en $\langle -\pi; 2\pi \rangle$, de la siguiente ecuación:

$$\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -1$$

A) $8\pi/9$

B) $5\pi/3$

C) 2π

D) $20\pi/9$

E) $8\pi/3$

CLAVE: A

Ecuación trigonométrica no elemental

Son aquellas ecuaciones trigonométricas donde intervienen diversas razones trigonométricas de la incógnita o de una variable que la involucra.

Ejemplos:

- $4\cos^4\left(\frac{\pi-x}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2}\sin(x)$
- $\sin(x)\cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin^2(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos^2(x)$
- $\cos(x) + \sin(\pi x) = \cos(\pi x)$
- $\sin(2x) + \sin(4x) + \sin(6x) + \sin(8x) = 0$

Como resolver una Ecuación trigonométrica no elemental

Para resolver una ET no elemental, esta debe ser reducida a su forma elemental y luego aplicar alguno de los criterios ya desarrollados.

Para **reducir** la ET no elemental a una ET elemental, se utilizará las **identidades trigonométricas** tanto fundamentales como auxiliares, en sus diversas versiones (para un arco simple, para la suma y diferencia, arco doble, arco mitad, arco triple y transformaciones trigonométricas), así como el fundamento teórico de funciones trigonométricas y sus inversas correspondientes.

También se va a recurrir a **procedimientos aritméticos o algebraicos**, tales como operaciones básicas, factorización, productos notables (desarrollo de binomios al cuadrado o al cubo, diferencia de cuadrados o cubos, suma de cubos) resolución de una ecuación de segundo grado, propiedades de ecuaciones de segundo grado o grado superior.

Algunas resoluciones nos permitirá utilizar **gráficas de funciones**, por lo que hay que estar atentos a preguntas como número de soluciones en un cierto intervalo o número de intersecciones con el eje X.

PROBLEMA 05

Calcule la suma de soluciones en $\langle 0; 2\pi \rangle$, de la siguiente ecuación:

$$2 \cos(x) = \sec(x) - 1$$

A) $\pi/2$

B) $3\pi/2$

C) 2π

D) $5\pi/2$

E) 3π

CLAVE: E

PROBLEMA 06

Calcule la suma de soluciones en $\langle 0; 2\pi \rangle$, de la siguiente ecuación:

$$2 \operatorname{sen}^3(x) = 3 \operatorname{sen}^2(x) + 3 \operatorname{sen}(x) - 2$$

A) π

B) $3\pi/2$

C) 2π

D) $5\pi/2$

E) 3π

CLAVE: D

PROBLEMA 07

Calcule el numero de soluciones en el intervalo de $[0; 2\pi]$, de la ecuación trigonométrica:

$$8\text{sen}^4\left(\frac{x}{2}\right) - \cos(2x) + 1 = 0$$

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

E) 4

CLAVE: C

PROBLEMA 08

Dada la ecuación:

$$25 \text{sen}(2x) + 30\text{sen}(x) = 40\cos(x) + 24$$

Determine el número de soluciones en el intervalo $\langle -\pi/2; \pi \rangle$.

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

CLAVE: B

PROBLEMA 09

Al resolver la ecuación:

$$\text{sen}(2x) = 4(\text{sen}(x) + \cos(x)) - 4$$

obtenemos como soluciones: $\forall k \in \mathbb{Z}$

A) $\{k\pi\}$ B) $\left\{2k\pi; \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi\right\}$

C) $\left\{(2k + 1)\pi; \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi\right\}$

D) $\{2k\pi; k\pi\}$ E) $\left\{k\pi; \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi\right\}$

CLAVE: B

PROBLEMA 10

Determine el conjunto solución de la ecuación:

$$\sec(x) (2\text{sen}(x) - 1) + 4\text{sen}(x) - 2 = 0$$

E indique como respuesta la suma de las soluciones en el intervalo $[\pi/2; 3\pi/2]$.

A) $5\pi/6$

B) $4\pi/3$

C) $8\pi/3$

D) $17\pi/6$

E) 3π

CLAVE: D

PROBLEMA 11 (5TA PC CEPRE 2022 – II)

Indique el número de soluciones en $\langle 0; \pi \rangle$, de la siguiente ecuación:

$$2 \operatorname{sen}(2\theta) + 2 \operatorname{sen}(\theta) = \operatorname{sen}^2(\theta) + \cos(\theta) [2 + \cos(\theta)]$$

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

E) 4

CLAVE: D**PROBLEMA 12 (5TA PC CEPRE 2017 – II)**

Calcule la suma de las dos menores soluciones positivas de la ecuación trigonométrica:

$$|\operatorname{sen}(x)| + |\cos(x)| = \sqrt{2}$$

CLAVE: DA) $\pi/4$ B) $\pi/2$ C) $3\pi/4$ D) π E) $3\pi/2$

PROBLEMA 13 (2DO PARCIAL 2013 – I)

Determine el número de valores de $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ que satisfacen la ecuación:

$$3\cos(2x) - 7\sin(x) + 5 = 0$$

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

CLAVE: B**PROBLEMA 14 (5TA PC CEPRE 2019 – I)**

Calcule la suma de soluciones en $\langle 0; \pi \rangle$, de la siguiente ecuación:

$$\cos^2(2x) = \cos^2(3x) + \sin^2(2x)$$

A) 3π B) $35\pi/12$ C) $23\pi/12$ D) 2π E) $13\pi/12$ **CLAVE: D**

PROBLEMA 15 (2DO PARCIAL 2018 – I)

Determine las soluciones en $[0; \pi)$ de la ecuación:

$$\tan(2x) + \tan(x) = 1 - \tan(2x)\tan(x)$$

CLAVE: E

Dé como respuesta la suma de soluciones.

- A) $4\pi/5$ B) $5\pi/4$ C) $7\pi/4$ D) $3\pi/4$ E) $\pi/2$

PROBLEMA 16 (5TA PC CEPRE 2019 – II)

Calcule la suma de soluciones en $[0; \pi/2]$, de la siguiente ecuación:

$$(\sin(7x) + \cos(5x))(\cos(7x) - \sin(5x)) = 3\cos(12x)$$

CLAVE: E

- A) $3\pi/8$ B) $\pi/2$ C) $2\pi/3$ D) π E) $3\pi/2$

PROBLEMA 17 (EX. FINAL 2013 – II)

Dada la ecuación:

$$3\sin^4(x) + \cos^4(x) = \sin^2(2x)$$

Determine la solución general si se sabe que $\cos(2x) \neq 0; \forall k \in \mathbb{Z}$.

- A) $\{k\pi \pm \pi/2\}$ B) $\{k\pi \pm \pi/8\}$
 C) $\{k\pi \pm \pi/6\}$
 D) $\{k\pi \pm \pi/4\}$ E) $\{k\pi \pm \pi/3\}$

CLAVE: C

PROBLEMA 18

Resuelva la ecuación:

$$3\sqrt{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{1 + \cos(x)} = -2; \forall k \in \mathbb{Z}$$

- A) $\{k\pi \pm 3\pi/2\}$ B) $\{2k\pi \pm 3\pi/4\}$
 C) $\{2k\pi \pm \pi/4\}$
 D) $\{4k\pi \pm 3\pi/2\}$ E) $\{4k\pi \pm \pi\}$

CLAVE: D

PROBLEMA 19

Dada la ecuación trigonométrica:

CLAVE: B

$$\sen^4(x)(1 + 2\sen^2(x)) + \cos^4(x)(1 + 2\cos^2(x)) = 2; \forall k \in \mathbb{Z}$$

A) $\{(2k + 1)\pi/2\}$

B) $\{(2k + 1)\pi/8\}$

C) $\{(2k + 1)\pi/4\}$

D) $\{k\pi/4\}$

E) $\{k\pi/8\}$

PROBLEMA 20 (5TA PC CEPRE 2007 – II)

Dada la ecuación trigonométrica:

CLAVE: B

$$\sen(2x) + 2\sen(x) = \cos(2x) + 2\cos(x) + 3; \forall k \in \mathbb{Z}$$

A) $\{(2k + 1)\pi/4\}$

B) $\{(4k + 1)\pi/2\}$

C) $\{(2k + 1)\pi/2\}$

D) $\{2k\pi\}$

E) $\{(4k - 1)\pi/2\}$

PROBLEMA 21 (2DO PARCIAL 2015 – I)

Fijados los valores de a y b , considere las ecuaciones $\sin(x) = a$, cuyo conjunto en $[0; \pi]$ es A y $\tan(2x) = b$, cuyo conjunto solución en $[0; \pi]$ es B . Se sabe que $A \setminus B = \{5\pi/6\}$. Calcule el valor de $4a^2 + b^2$.

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

CLAVE: C

PROBLEMA 22

Resuelva la ecuación:

$$\sqrt{2}(\sin(x) + \cos(x)) = \tan(x) + \cot(x);$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}$$

- A) $\{2k\pi + 5\pi/2\}$ B) $\{2k\pi + 3\pi/4\}$
C) $\{2k\pi + \pi/4\}$
D) $\{k\pi + \pi/8\}$ E) $\{k\pi/2 + 5\pi/8\}$

CLAVE: C